§1. Дифференциалдық теңдеулер

Геометрия, физика, механика, жаратылыстану және техниканың көптеген сұрақтарына жауап беруде ***дифференциалдық теңдеулер*** маңызды орын алады. Осылайша аталатын теңдеулер тәуелсіз айнымалы x-ті, ізделінді y функциясын және оның x бойынша алынған түрлі ретті туындыларын байланыстырады. Берілген дифференциалдық теңдеуге енген ізделінді y функция туындысының жоғары реті осы теңдеудің ***реті*** делінеді. Сонымен n–ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (4.1)$$

ал кейбір жағдайда бұл теңдеуге x, y және реті n-нен кіші туындылар кірмеуі де мүмкін. Мәселен,

$$y' + \frac{2y}{x} = \sin x, \quad y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y''' + yy' = 0$$

теңдеулері сәйкесінше бірінші, екінші және үшінші ретті теңдеулерге жатады. (4.1) дифференциалдық теңдеуі оның сол жағы y белгісіз функциясына және оның y', y'', ..., $y^{(n)}$ туындыларына қатысты бірінші дәрежелі көпмүше, атап айтқанда

$$a^0(x)\, y^{(n)} + a^1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a^n(x)\, y = f(x) \qquad (4.2)$$

түріндегідей жазылса, оны сызықтық ***дифференциалдық теңдеу*** деп атайды.

Мұндайда $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a^n(x)$ - әдетте кейбір интервалда анықталған және үзіліссіз функциялар – сызықтық теңдеу ***коэффициенттері***, $f(x)$ – теңдеудің ***оң жағы*** немесе оның ***бос мүшесі*** деп аталады. Егер (4.2) сызықтық теңдеуінің $f(x)$ оң жағы тепе-тең нөлге тең болса, теңдеу ***біртектес*** (немесе оң жақсыз), өзге жағдайда ***біртектес емес*** (оң жағы бар) теңдеу болады.

Дифференциалдық теңдеулер теориясының негізгі мәселесі – берілген дифференциалдық теңдеудің барлық шешімдерін іздестіріп табу. Қарапайым жағдайда мұндай мәселені шешу интегралды есептеуге айналады. Сондықтан дифференциалдық теңдеу шешімін оның ***интегралы*** деп те атай береді. Сол сияқты берілген дифференциалдық теңдеу қандай да туындысы жоқ теңдеуден салдар ретінде шықса, соңғысын берілген ***дифференциалдық теңдеудің интегралы*** дейді.

(4.1) теңдеуін қанағаттандыратын, атап айтқанда, теңдеуге қойғаннан оны тепе-теңдікке айналдыратын $y = \varphi (x)$ функциясын ***теңдеудің шешімі*** дейді. Дифференциалдық теңдеуді ***шешу*** немесе ***интегралдау*** дегеніміз – берілген облыста оның барлық шешімдерін табу деген сөз.

Шешім графигін ***интегралдық сызық*** деп атайды. y функциясының туындысы болып келетін үзіліссіз $f(x)$ функциясы бойынша y функциясын іздестіру, атап айтқанда, интегралдық есептеудің негізгі жолы – қарапайым $y^{/}= f(x)$ дифференциалдық теңдеуіне келтіретінін байқаймыз. Бұл теңдеудің жалпы шешімі

$$y =\int f(x)dx + C \qquad (4.3)$$

болып табылады, мұндағы C – кез келген тұрақты, ал интеграл $f(x)$ функциясының алғаш бейнелерінің бірін кескіндейді. C тұрақтысының үзіліссіз болу шартында осы қарапайым дифференциалдық теңдеудің кез келген шешімін алуға болады. Жоғары ретті дифференциалдық теңдеуді интегралдағанда бірнеше еркін тұрақты пайда болады. Мәселен, екінші ретті $y^{//}= 0$ теңдеуін шешетін болсақ, алдымен $y^{/}=c_1$ туындысын тауып, одан кейін $y = \int c_1 dx + c_2 = c_1 x + c_2$ шешіміне келеміз, яғни екінші ретті теңдеуде екі тәуелсіз тұрақты бар, атап айтқанда соңғы формуладағы тәуелсіз тұрақтылар саны теңдеу ретіне тең. Мұндай шешімді теңдеудің ***жалпы шешімі*** дейді, берілген жағдайда ол дифференциалдық теңдеу шешімдерінің шексіз жиынтығын кескіндейді.

1-мысал. $y =\sin x$ функциясы - екінші ретті

$$y^{//} +y = 0 \qquad (4.4)$$

дифференциалдық теңдеуінің шешімі (интегралы) болып табылады, өйткені y орнына $\sin x$ мәнін (2) теңдеуіне қойғаннан, ол

$$(\sin x)^{//}+ \sin x = 0$$

демек тепе-теңдікке айналады. *y=sin x* шешімімен бірге теңдеуді *y* =(1/2) *sin x, y = cos x, y* =3*cos x* функциялары да қанағаттандырады, бірақ *y =sin x*+(1/2) функциясы теңдеу шешімі бола алмайды.

2-мысал. 1-ретті

$$xy' + y = 0 \tag{4.5}$$

дифференциалдық теңдеуін қарастырайық.

$$y = \frac{1,5}{x} \tag{4.6}$$

функциясы (4.5) теңдеуінің шешімі болып табылады, өйткені ол (4.5) өрнегін $x \cdot \frac{1,5}{-x^2} + \frac{1,5}{x} = 0$ тепе-теңдігіне айналдырады.

Сонымен бірге, (4.6) теңдеуі (4.5) дифференциалдық теңдеуінің интегралы болып табылады.

Жалпы кез келген

$$xy = C \ \ (C \text{ - тұрақты}) \tag{4.7}$$

теңдеуі (4.5) дифференциалдық теңдеуінің интегралы болып табылады. Расында, (4.7) өрнегінен $(xy)' = 0$ болатыны, ал бұдан (көбейтіндінің туындысы ережесі бойынша) (4.5) туындайды. (4.7) интегралын *y*-ке қатысты шешкен күнде

$$y = \frac{C}{x} \tag{4.8}$$

функциясына келеміз. (4.8) функциясы бірмезгілде теңдеудің шешімі және интегралы болып келеді. $xy = \sqrt{3}$, $xy = -2$, $xy = \pi$ және т.б. (4.5) дифференциалдық теңдеуінің интегралдары болса, $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$, $y = -\frac{2}{x}$, $y = \frac{\pi}{x}$ сол теңдеудің шешімдері болып келеді.

3-мысал. 1-ретті

$$y' = \cos x \tag{4.9}$$

дифференциалдық теңдеуінің барлық шешімдерін табу керек.

Шешімі. $y = \varphi(x)$ функциясы *cos x* функциясы үшін алғаш бейне болғандықтан, мұндай функцияның ең жалпы түрі $\int \cos x dx$ анықталмаған интегралымен кескінделеді. Демек барлық шешімдері

$$y = sinx + C \tag{4.10}$$

формуласымен қамтылады. Кез келген C тұрақтысын қамтитын

$$y = sinx + C$$

функциясы (4.9) теңдеуінің ***жалпы шешімі***, ал $y = sinx$ (сол сияқты $y = sinx + (1/2)$, $y = sinx - 1$ және т.т.) функциясы ***дербес шешім*** болып келеді.

§2. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің геометриялық талқыламасы

1-ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі

$$\Phi(x, y, y') = 0. \tag{4.11}$$

Кейбір жағдайларда бұл теңдеу y' туындысына қатысты шешілуі мүмкін, атап айтқанда айқындалған

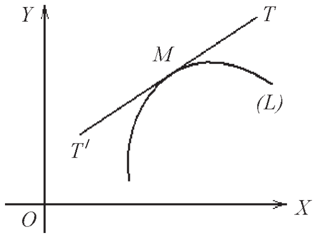
$$y' = f(x, y) \tag{4.12}$$

түрінде жазылады. Мұнда $f(x, y)$ функциясы кейбір облыста анықталған және үзіліссіз болып, осы облысқа тиіс интегралдар (шешімдер) іздестіріледі.

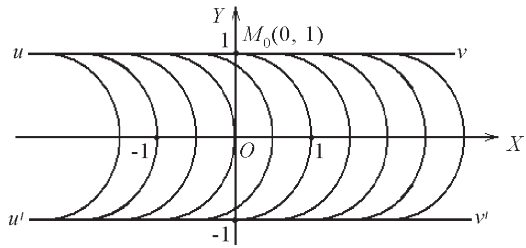
(4.12) теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = \varphi(x, C) \tag{4.13}$$

түрінде кескінделеді, мұнда C - кез келген тұрақты. $y' = f(x, y)$ 1-ретті дифференциалдық теңдеуінің бір интегралын кескіндейтін L сызығы (14-сурет) осы теңдеудің ***интегралдық сызығы*** делінеді. y' туындысы интегралдық сызық жанамасының бұрыштық коэффициенті болып табылады. Геометриялық тұрғыда (4.13) жалпы шешімі интегралдық сызықтар жиынтығын, атап айтқанда, C тұрақтысының түрлі мәндеріне сәйкес сызықтар жиынтығын кескіндейді. Интеграл сызықтарының бір қасиеті: олардың әрбір $M(x,y)$ нүктесіндегі жанамасының Ox осіне еңкеюі $tg\alpha = f(x,y)$ шартын қанағаттандырады (a - Ox осі мен жанама арасындағы бұрыш). Берілген M (x,y) нүктесі арқылы өтетін интегралдық сызықты таппас бұрын (4.11) теңдеуінен y' туындысын анықтап, M нүктесі арқылы өтетін $T'T$ түзуін жүргізуімізге болады. Осы түзу ізделінді интегралдық сызықтың бағытын анықтайды. Қарастырылатын облыстың барлық мүмкін болатын нүктелеріне сәйкес $T'T$ түзулер жиынтығын (4.11) теңдеуінің ***бағыттар өрісі*** дейді.



14-сурет



15-сурет

§3 Айнымалылары айырылған теңдеулер

P коэффициенті тек x-ке тәуелді, ал Q коэффициенті тек y-ке тәуелді, атап айтқанда

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \tag{4.14}$$

түрінде берілген дифференциалдық теңдеуді ***айнымалылары айырылған дифференциалдық теңдеу*** дейді. Айнымалылары айырылған дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C \quad (C\text{ - тұрақты}) \tag{4.15}$$

теңдеуі түрінде кескінделеді. (x_0, y_0) бастапқы мәндеріндегі дербес интегралды табу үшін x_0, y_0-ды (4.15)-ке енгізіп, сәйкес $C = C_0$ мәнін табамыз. Сонда ізделінді дербес интеграл

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C_0$$

түріндегідей жазылады.

Жалпы шешім қызықтырмайтын жағдайда, дербес шешімді тікелей

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)dy = 0 \qquad (4.16)$$

формуласы бойынша тапқан орынды.

Мысал. $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $y_0 = 3$ бастапқы мәндерінде

$$\sin x dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0 \qquad (4.17)$$

дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табу талап етіледі.

Шешімі. (4.17) теңдеуінің жалпы интегралы

$\int \sin x dx + \int \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = C$ немесе $-\cos x + 2\sqrt{y} = C$ түрінде кескінделеді. Мұнда $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 3$ деп ұйғарып, $C = 2\sqrt{3}$, демек ізделінді дербес шешім

$$y = \frac{\left(2\sqrt{3} + \cos x\right)^2}{4}$$

болады. Оны тікелей

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin x dx + \int_{3}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$$

формуласы бойынша шығарып алуға болады.

§4. Айнымалыларды айыру

M_1 және M_2 функциялары тек x-ке тәуелді, ал N_1 және N_2функциялары тек y-ке тәуелді, атап айтқанда

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

түрінде берілген дифференциалдық теңдеудің екі жағын бірдей

$M_2 \cdot N_1$-ге бөлу арқылы айнымалылары айырылған дифференциалдық теңдеуге келтіруге болады. Келтіру процесінің өзін ***айнымалыларды айыру*** дейді. Бөлу нәтижесінде шығатын теңдеу айнымалылары айырылған

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

түріне келіп отыр.

Мысал.

$$ydx - xdy = 0 \qquad (4.18)$$

теңдеуін қарастырайық. xy-ке бөлген соң айнымалылары айырылған

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$$

теңдеуіне келеміз. Оны интегралдау арқылы

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dy}{y} = C \Rightarrow \ln|x| - \ln|x| = C \qquad (4.19)$$

немесе $\ln\left|\frac{x}{y}\right| = C = \ln C_1$ болатыны шығады. Бұдан теңдеудің интегралы $\frac{x}{y} = C_1$ түріне келеді.

Мысал.

$$\sqrt{1-y^2}\,dx - ydy = 0 \qquad (4.20)$$

теңдеуінің барлық шешімдерін табу талап етіледі.

Шешімі. $y = \pm 1$ қос түзуімен шектелген жолақ ішінде

$$\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\left(=\frac{dy}{dx}\right); \quad \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\left(=\frac{dx}{dy}\right)$$

функцияларының кем дегенде біреуі бірмәнді анықталған. Осы жолақ сыртында сөз етілген функциялардың бірде-біреуі анықталмаған. Демек (4.20) теңдеуінің барлық интегралдары $y = \pm 1$ түзулерімен шектелген жолақ ішінде жатады. (4.20) теңдеуін $\sqrt{1-y^2}$ -қа бөлеміз, сонда шығатын теңдеу түрі

$$dx - \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0,$$

мұнда айнымалылар айырылған. Интегралдау нәтижесінде шығатын теңдеу

$$x - \sqrt{1-y^2} = C$$

немесе

$$x - C = \sqrt{1-y^2}\ . \qquad (4.21)$$

Бұл теңдеу 15-суретте бейнеленген жартышеңберлер жиынтығын кескіндейді. Алайда ол (4.20) теңдеуінің барлық интегралдық сызықтарын қамти алмайды, өйткені соңғы теңдеуді $\sqrt{1-y^2}$ -қа бөлген шақта $y=1$ және $y=-1$ шешімдерінен (суреттегі uv және $u'v'$ түзулері) аластаймыз.

Ескерту. Мұнда жоғалған шешімдер дербес шешім болмайды. Өйткені дербес шешім деп кейбір бастапқы мәндердегі бірден-бір шешімді айтқан болатынбыз. Алайда $y=1$ түзуінің әрбір нүктесі арқылы екі шешім өтіп отыр; мәселен (0, 1) нүктесі арқылы $y=1$ түзуімен бірге $x = \sqrt{1-y^2}$ жартышеңбері де өтеді, ол (4.20) теңдеуінің тағы бір шешімін береді, бұл шешім (4.21) теңдеуінен $C=0$ болғанда алынады. (4.21) теңдеуі барлық шешімдерді иеленбесе де, барлық дербес шешімдерді (жартышеңберлерді) қамтиды. $y=1$ және $y=-1$ шешімдері ***ерекше*** деп есептеледі. Жалпы, 1-ретті дифференциалдық теңдеудің интегралы оның әрбір нүктесі арқылы, кем дегенде, тағы бір интеграл өткенде ***ерекше*** болады.

§5. Толық дифференциалдардағы теңдеу

Егер

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{4.22}$$

теңдеуінің $P(x,y), Q(x,y)$ коэффициенттері

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \tag{4.23}$$

шартын қанағаттандыратын болса, онда (4.22) теңдеуінің сол жағы кейбір $F\left(x,y\right)$ функциясының толық дифференциалы болып келеді. Мұндайда $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dF\left(x,y\right)$ болып, (4.22) теңдеуінің жалпы интегралы

$$F\left(x,y\right)=C \tag{4.24}$$

түрінде жазылады.

Мысал. $x_0=1,\ y_0=1$ бастапқы мәндерінде

$$\frac{x^2-y}{x^2}dx+\frac{x+1}{x}dy=0 \tag{4.25}$$

дифференциалдық теңдеуінің дербес интегралын табу талап етіледі.

Шешімі. (4.23) шарты орындалып отыр. Оның үстіне

$P(x,y)=1-\dfrac{y}{x^2},\ Q(x,y)=1+\dfrac{1}{x}$ функциялары $Ax^m y^n$ түріндегідей мүшелерге жіктеледі. Сондықтан алғашбейнені төмендегідей интегралдау амалымен іздестіреміз:

y тұрақты болғанда

$$\int\left(1-\frac{y}{x^2}\right)dx=x+\frac{y}{x};$$

x тұрақты болғанда

$$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dy=y+\frac{y}{x}.$$

Осы өрнектерді $\left(\frac{y}{x}\right.$ мүшесін бір-ақ рет қана жазып) біріктіреміз. Шыққан $x+y+\frac{y}{x}$ функциясы алғашбейне болып, жалпы интегралы

$$x+y+\frac{y}{x}=C$$

түрінде жазылады. $x_0=1,\ y_0=1$ бастапқы мәндерін енгізіп, $C=3$ мәнін табамыз. Ізделінді дербес интеграл

$$x+y+\frac{y}{x}=3.$$

§6. Интегралдаушы көбейткіш

Егер

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{4.26}$$

теңдеуінің $M(x,y),\ N(x,y)$ коэффициенттері

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y} \tag{4.27}$$

шартын қанағаттандырмаса, онда (4.26) теңдеуінің сол жағы кейбір функцияның толық дифференциалы бола алмайды. Бірақ кей кезде

$$\mu\left(Mdx+Ndy\right)$$

өрнегі қандай да бір $F_1\left(x,y\right)$ функциясының толық дифферен-циалы болатындай $\mu\left(x,y\right)$ көбейткішіне қол жеткізуге болады. Сонда жалпы интеграл $F_1\left(x,y\right)=C$ түріне келеді. Мұндайда $\mu\left(x,y\right)$ функциясын ***интегралдаушы көбейткіш*** дейді.

Мысал. $2ydx+xdy=0$ дифференциалдық теңдеуінің сол жағы толық дифференциал болмайды. Алайда x-ке көбейткен күнде

$$x\left(2ydx + xdy\right) = d\left(x^2 y\right)$$

және берілген теңдеудің жалпы интегралы

$$x^2 y = C$$

болады.

Ескерту. Кез келген дифференциалдық теңдеу әрқашан интегралдаушы көбейткішке ие болып отырады екен. Алайда оны іздестірудің бірден-бір ортақ тәсілі жоқ. Көптеген жағдайда ондай көбейткішті іздестіріп табу өз алдына бір есепке айналып, бастапқы интегралды шешкенмен салыстырғанда оңай еместігі байқалады. (4.26) теңдеуінің интегралдаушы көбейткіші қалайша іздестірілетінін көрсетейік.

$$\mu\left(M\left(x,y\right)dx + N\left(x,y\right)dy\right) = 0$$

теңдеуі толық дифференциалдардағы теңдеу болу үшін

$$\frac{\partial\left(\mu N\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\mu M\right)}{\partial y}$$

шарты немесе

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{4.28}$$

шарты орындалу керек. (4.28) теңдігі (4.26) теңдеуінің интегралдаушы көбейткіштерінің дифференциалдық теңдеуі болып табылады, өйткені оның әрбір шешімін (4.26) теңдеуінің екі жағына бірдей көбейткеннен оны толық дифференциалдардағы теңдеуге айналдырады. Интегралдаушы $\mu\left(x,y\right)$ көбейткішін табу үшін дербес туындылары бар (4.28) дифференциалдық теңдеуін интегралдау қажет. Жалпы жағдайда бұл есепті шешу әдеттегі дифференциалдық теңдеуді шешкеннен әлдеқайда қиын. Бірақ $\mu\left(x,y\right)$ функциясының x немесе y айнымалыларының біреуіне ғана тәуелді болуында, есеп әжептәуір жеңілдене түседі. Осы екі жағдайға толығырақ тоқталайық.

$\mu = \mu(x)$ болсын. Онда (4.28) теңдеуі

$$N\frac{\partial\mu(x)}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

немесе

$$\frac{\partial\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx$$

түріне келеді, ал одан

$$\ln\mu(x) = \int\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx,$$

атап айтқанда

$$\mu(x) = e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx} \tag{4.29}$$

болатыны туындайды. (C тұрақтысы 0-ге тең деп алынған, өйткені қандай да бір интегралдаушы көбейткішіне ие болса да жеткілікті).

Осы жағдайда $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ өрнегі y-тен тәуелсіз екені айқын.

Кері пікір де орынды: егер $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ өрнегі y-тен тәуелсіз болса, онда тек x-ке тәуелді $\mu(x,y)$ интегралдаушы көбейткіші бар болады. Ол (4.29) теңдігімен өрнектеледі.

Енді $\mu = \mu(y)$ болсын. Онда (4.28) теңдеуі

$$M\frac{\partial\mu(y)}{\partial y} = -\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

немесе

$$\frac{\partial\mu(y)}{\mu(y)}=-\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}dy$$

түріне келеді, ал одан

$$\ln\mu(y)=-\int\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}dy,$$

атап айтқанда

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}dy} \tag{4.30}$$

болатыны туындайды (мұнда C=0 деп алынған). Осы жағдайда $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}$ өрнегі x-тен тәуелсіз. Кері пікір де орынды: егер $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}$ өрнегі x-тен тәуелсіз болса, онда тек y-ке тәуелді $\mu(x,y)$ интегралдаушы көбейткіші бар болады және ол (4.30) теңдігімен өрнектеледі.

Қарастырылатын дербес жағдайларда (4.26) теңдеуін толық дифференциалдардағы теңдеуге келтіру үшін іс жүзінде $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}$ өрнегін құрып, оның N-ге қатынасын алады.

Егер бұл қатынас y-тен тәуелсіз болса, онда интегралдаушы көбейткішті табу үшін (4.29) формуласын қолдану керек; қарсы жағдайда $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}$ өрнегінің M-ге қатынасын алады. Егер бұл қатынас x-тен тәуелсіз болса, онда x-тен тәуелсіз $\mu(x,y)$ интегралдаушы көбейткіші бар болады және оны (4.30) формуласы бойынша есептеп табуға болады.

Мысал. $(2ydx + xdy) = d(x^2 y)$ дифференциалдық теңдеуінің интегралдаушы көбейткішін тауып, теңдеуді интегралдау талап етіледі.

Шешімі.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{-2(1+xy^2)}{x^2 - y}$$

өрнегі x пен y-ке тәуелді.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-2(1+xy^2)}{x(1+xy^2)} = -\frac{-2}{x}$$

қатынасы x-ке ғана тәуелді. Олай болса $\mu(x,y)$ интегралдаушы көбейткіші (4.29) формуласы бойынша іздестіріледі:

$$\mu(x) = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}.$$

Тедеудің екі жағын $\frac{1}{x^2}$ -қа көбейтеміз, сонда

$$\left(1 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y^2 + \frac{1}{x}\right)dy = 0,$$

немесе

$$dx + y^2 dy + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0.$$

$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$ болғандықтан, интегралдау нәтижесінде жалпы интеграл $x + \frac{y^3}{3} + \frac{y}{x} = \frac{C}{3}$ немесе $3x^2 + xy^3 + 3y - Cx = 0$ түрінде табылады.

§7. Біртектес теңдеу

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$$

шартын қанағаттандыратын $f(x, y)$ функциясын m ***дәрежелі біртектес функция*** дейді. $M(x, y)$ және $N(x, y)$ функциялары өлшемдес біртектес функциялар болып келетін

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{4.31}$$

дифференциалдық теңдеуін ***біртектес теңдеу*** дейді. Біртектес теңдеуді әрқашан $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ түріне келтіруге болады. Сондықтан айтқанға қосымша эквиваленттті анықтама енгізуімізге болады. (4.31) теңдеуіндегі $M(x, y), N(x, y)$ коэффициенттерінің $\frac{M}{N}$ қатынасын $\frac{y}{x}$ қатынасының функциясы түрінде кескіндеуге келетін болса, теңдеу ***біртектес теңдеу*** деп аталады. Мұндай қатынасты t әрпімен белгілейміз:

$$t = \frac{y}{x}. \tag{4.32}$$

Жоғарыда айтылғанға сәйкес

$$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \tag{4.33}$$

теңдеуі – біртектес, өйткені

$$\frac{M}{N} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{-x} = -\frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -t - \sqrt{1 + t^2}\ . \tag{4.34}$$

атап айтқанда, $\frac{M}{N}$ қатынасы $\frac{y}{x}$ қатынасының функциясына айналып отыр.

$$y = tx \ \left(\Rightarrow dy = tdx + xdt\right) \tag{4.35}$$

ауыстырмасы бойынша кез келген біртектес теңдеу айнымалылары айырылған теңдеуге келтіріледі.

1-мысал. $x_0 = 3, y_0 = 4$ бастапқы мәндерінде (4.33) теңдеуін интегралдау талап етіледі.

Шешімі. (4.30) ауыстырмасы нәтижесінде (4.33) теңдеуі

$$\sqrt{x^2 + x^2t^2}\,dx - x^2dt = 0 \tag{4.36}$$

немесе

$$|x|\sqrt{1+t^2}\,dx - x^2dt = 0 \tag{4.37}$$

түріне келеді. Айнымалыларды айырып, теңдеуді

$$\frac{dx}{|x|} = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \tag{4.38}$$

түріне келтіреміз. Айнымалыларды айырғанда $x = 0$ шешімі жоғалып отыр. Алайда ол бастапқы шарттарды қанағаттандырмайды. Интегралдауды $x_0 = 3, t_0 = \frac{y_0}{x_0} = \frac{4}{3}$ бастапқы шарттарында орындау үшін x абсциссасының оң мәні алынады, демек

$$|x| = x \tag{4.39}$$

деп ұйғарамыз. Онда (4.38) теңдеуден

$$\int_3^x \frac{dx}{x} = \int_{4/3}^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \tag{4.40}$$

болатыны, ал одан

$$\ln x - \ln 3 = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) - \ln 3. \tag{4.41}$$

t-ны $\frac{y}{x}$-пен алмастырып, потенцирлеген соң

$$x = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \tag{4.42}$$

интегралын шығарып аламыз. Оған сәйкес дербес шешім

$$y = \frac{x^2 - 1}{2} \tag{4.43}$$

болып келеді.

Ескерту. (4.40) формуласының сол жағы, жоғарғы шек 0-ге тең болғанда немесе теріс мәндерді қабылдағанда мағынасыз. Сондықтан шешімді іздестіру барысында x-тің оң мәндерімен шектелу талап етілген. (4.43) функциясы $x \le 0$ мәндері үшін (4.33) теңдеуінің шешімі болу-болмауын қосымша зерттейміз. (4.43)
функциясын (4.33) теңдеуінің сол жағына енгізгеннен $y = \frac{x^2 - 1}{2}$

функциясы шешімді x-тің барлық мәндерінде беретінін көреміз.

2-мысал. $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ дифференциалдық теңдеуін шешу талап етіледі.

∇ Берілген теңдеу

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy} \Rightarrow$$

$$f(tx, ty) = \frac{t^2 x^2 + t^2 y^2}{txty} = \frac{t^2 (x^2 + y^2)}{t^2 xy} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = f(x, y)$$

болғандықтан, анықтамаға сәйкес біртектес теңдеу болып келеді. Теңдеуді шешу үшін $u = \frac{y}{x}$ ауыстырмасын қолданып, төмендегідей түрлендірулер нәтижесінде

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u,$$

$$u'x + u = \frac{x^2 + u^2 x^2}{xux} \Rightarrow u'x + u = \frac{1 + u^2}{u} \Rightarrow u'x = \frac{1 + u^2}{u} - u \Rightarrow$$

$$u'x = \frac{1 + u^2 - u^2}{u} \Rightarrow u'x = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{du}{dx} x = \frac{1}{u} \Rightarrow xdu = \frac{dx}{u}$$

айнымалылары айырылған теңдеуге келеміз. Оны шешкеннен шығатын өрнек төмендегідей:

$$\frac{dx}{x} = udu \Rightarrow \ln|x| = \frac{u^2}{2} - C \Rightarrow \frac{u^2}{2} - \ln|x| = C.$$

Бастапқы айнымалыға оралған соң, берілген теңдеудін жалпы интегралын

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow \ \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \ln|x| = C$$

түрінде табамыз.

§8. Бірінші ретті сызықтық теңдеулер

Ізделінді y функциясы мен оның $\frac{dy}{dx}$ туындысына қатысты сызықты (атап айтқанда 1-дәрежелі) теңдеуді ***сызықтық теңдеу*** дейді. Сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)\,. \tag{4.44}$$

Егер (4.44) теңдеуінің оң жағы $Q(x) \equiv 0$ болса, онда (1) теңдеуі ***сызықтық біртектес***, қарсы жағдайда ***біртектес емес*** делінеді. Кейде мұндай сызықтық теңдеулерді сәйкесінше оң жағы жоқ және оң жағы бар теңдеулер дейді. Айта кететін жайт: біртектес сызықтық теңдеуді x және y-ке қатысты біртектес теңдеумен (алдыңғы тармақ) шатастырудан аулақ болу керек. Соңғы жағдайдағы «біртектестік» ұғымы $\frac{dy}{dx} + P(x)y$ өрнегінің, y функциясы мен оның $\frac{dy}{dx}$ туындысына қатысты сызықтық біртектес функция болуынан туындап отыр.

(4.44) теңдеуін біртектес емес деп ұйғарайық, $Q(x) \neq$ болсын. Осы теңдеуді интегралдаудың екі әдісін көрсетейік:

1. ***Ауыстырма әдісі***. 2. ***Еркін тұрақтыны вариациялау әдісі***.

Біртектес сызықтық теңдеу жағдайы арнайы қарастыруды талап етпейді, өйткені $Q(x)\equiv 0$ болса, (4.44) теңдеуі бір мезгілде айнымалылары айырылған дифференциалдық теңдеу болып табылады.

8.1. Ауыстырма әдісі

(4.44) теңдеуінде $y=uv$ деп ұйғарып, y-тің орнына жаңа, мәселен v айнымалысына көшеміз. Содықтан екінші v айнымалысын қосалқы айнымалы ретінде қарастырып, оны қалауымызша таңдаймыз. Төменде ол көрсетіледі. $\dfrac{dy}{dx}$ туындысын есептеп, u және v арқылы өрнектелген y-пен $\dfrac{dy}{dx}$-ті (4.44) теңдеуіне енгіземіз.

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

Болғандықтан, теңдеу

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}+P(x)v\right)=Q(x) \qquad (4.45)$$

түріне келеді. Қосалқы v айнымалысын қалауымызша алуға болатындығын пайдаланып, оны квадрат жақшадағы өрнек нөлге айналатындай аламыз, атап айтқанда

$$\frac{dv}{dx}+P(x)v=0 \qquad (4.46)$$

болуын талап етеміз. Бұл айнымалылары айырылған теңдеу. Оның екі жағын v-ға бөліп, dx-ке көбейткеннен

$$\frac{dv}{v}+P(x)dx=0$$

теңдеуін, ал одан интегралдау арқылы

$$\ln v+\int P(x)dx=\ln C$$

немесе

$$v = Ce^{-\int P(x)dx} \tag{4.47}$$

өрнегін табамыз. Осы v өрнегін (4.45) теңдеуіне қойып, u үшін айнымалылары айырылған

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{du}{dv} = Q(x) \tag{4.48}$$

теңдеуін шығарып аламыз. Оның екі жағын $e^{\int P(x)dx}$-ке көбейткен күнде мындай өрнек:

$$Cdu = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

ал одан

$$u = \frac{1}{C}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right] \tag{4.49}$$

болатыны шығады. (4.49) бен (4.47) формулалары u мен v-ны x-ке тәуелді өрнектеп отыр. Бізге y-тің x-тен тәуелділігін табу талап етілетіндіктен, ал $y = uv$ болатындықтан, нәтижесінде (4.44) сызықты теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right] \tag{4.50}$$

түрінде жазылады. Айта кету керек, (4.46) теңдеуін интегралдау барысында шыққан C еркін тұрақтысы, v-ны u-ға көбейткенде қысқарып кетті. Олай боларын сезгенбіз, өйткені 1-ретті теңдеудің жалпы шешімі бір ғана еркін тұрақтыны қамтуы тиіс. Ондай көрегендікпен (4.47) шешімінде алдын ала $C = 1$ деп ұйғарып, (4.46) теңдеуінің жалпы шешімінің орнына (әдеттегі практика жүзіндегідей) $v = e^{-\int P(x)dx}$ дербес шешімін алуға болар еді.

Мұнда қолданылған ауыстырма әдісі (4.44) сызықты теңдеуін интегралдау есебін, айнымалылары айырылған (4.46) мен (4.48) қос теңдеуінің шешімдерін іздестіруге айналдырады.

1-мысал. Ауыстырма әдісімен $\dfrac{dy}{dx} - ay = e^{bx}$ сызықтық теңдеуінің жалпы шешімін табу талап етіледі.

Шешімі. $y = uv$ деп ұйғарайық, сонда $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ және теңдеу

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} - av\right) = e^{bx}$$

түріне келеді. Ереже бойынша $\frac{dv}{dx} - av = 0$ болуын талап етеміз. Айнымалыларды айыра келе $\frac{dv}{v} - adx = 0$, ал одан $v = Ce^{ax}$ өрнегін табамыз. Жоғарыда айтылғандай, $v = Ce^{ax}$ шешіммен шектеліп, оны түрленген теңдеуге енгіземіз. Сонда $e^{ax}u' = e^{bx}$ немесе $du = e^{(b-a)x}dx$, бұдан $u = \frac{1}{b-a}e^{(b-a)x} + C$ ($b \neq a$ болғанда) және $u = x + C$ ($b = a$ болғанда). $y = uv$ болғандықтан, жалпы шешім $b \neq a$ болғанда $y = \frac{e^{bx}}{b-a} + Ce^{ax}$ түрінде және $b = a$ болғанда $y = (x + C)e^{ax}$ түрінде табылады.

8.2. Еркін тұрақтыны вариациялау әдісі

Біртектес емес (4.44) теңдеуінің ($Q(x) \neq 0$) шешімін іздемес бұрын алдымен оған сәйкес

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad (4.51)$$

біртектес теңдеуін шешеміз. Бұл айнымалылары айырылған теңдеу, оның жалпы шешімі

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \qquad (4.52)$$

C еркін тұрақтысын қамтитын, табылған y функциясы біртектес емес теңдеудің шешімі бола алмайтыны айдан анық. Расында, өзінің туындысымен бірге (4.44) теңдеуіне қойылған шақта ол теңдеудің сол жағын тепе-тең етіп нөлге айналдырғанымен, оның оң жағы $Q(x) \neq 0$. Алайда C-ны еркін тұрақты демей-ақ, x-тен тәуелді кейбір функция, атап айтқанда $C = C(x)$ деп қарастырса, онда (4.52) функциясы біртектес емес (4.44) теңдеуінің шешімі болатындай $C(x)$ функциясын таңдауға болады екен.

$C(x)$ функциясын табу үшін $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ функциясының туындысын есептеп тауып, оны y функциясымен бірге (демек y пен $\dfrac{dy}{dx}$-ті) (4.44) теңдеуіне қойып, теңдеудің қанағаттануын, атап айтқанда тепе-теңдікке айналуын талап етеміз.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

Болғандықтан, (4.44) теңдеуі түрлене келе (екі ортаңғы мүшесі жойылған соң)

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \qquad (4.53)$$

теңдеуіне айналады. Қайта, айнымалылары айырылған және белгісіз $C(x)$ функциясы бар теңдеу шығып отыр. Оның жалпы шешімі

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1.$$

Табылған $C(x)$ өрнегін (4.52) теңдігіне енгізіп, біртектес емес (4.44) теңдеуінің ізделінді шешімін

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right],$$

атап айтқанда, дәл бұрынғы (4.50) түріндегідей шығарып аламыз.

Әдістің мұндай түрінің ***вариациялау*** деп аталуы C еркін тұрақтысын x-тің функциясы деп санап, вариациялағаннан (өзгерткеннен) қалыптасып отыр. Ауыстырма әдісіне ұқсас, соңғы әдіс (4.44) сызықты теңдеуін айнымалылары айырылған (4.51) және (4.53) теңдеулеріне келтіруге мүмкіндік береді.

2-мысал. Еркін тұрақтыны вариациялау әдісі бойынша

$\dfrac{dy}{dx} - yctgx = a\sin x$ сызықтық теңдеуінің жалпы шешімін табу талап етіледі.

Шешімі. Алдымен $\dfrac{dy}{dx} - yctgx = 0$ біртектес сызықтық теңдеуінің жалпы шешімін табамыз. Айнымалыларды айырудың арқасында бұл теңдеу $\dfrac{dy}{y} - ctgxdx = 0$ түріне келеді, одан $\ln y - \ln\sin x = \ln C,$ демек $y = C\sin x$ болады. $C = C(x)$ деп ұйғарып C-ны вариациялаймыз. Мұндайда $y = C(x)\sin x$ және $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dC(x)}{dx}\sin x + C(x)\cos x.$ y және $\dfrac{dy}{dx}$ өрнектерін бастапқы теңдеуге енгізгеннен

$$\frac{dC(x)}{dx}\sin x + C(x)\cos x - C(x)\sin x \cdot ctgx = a\sin x$$

немесе ықшамдаудан соң $dC(x) = adx$ теңдеуіне келеміз. Одан $C(x) = ax + C_1$ болатыны шығады. $C(x)$ өрнегін біртектес теңдеудің жалпы шешіміне енгізіп, бастапқы теңдеудің

$$y = (ax + C_1)\sin x$$

түріндегі жалпы шешімін табамыз.

§9. Бернулли теңдеуі

Бернулли теңдеуінің жалпы түрі

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n,$$

мұнда n=*const*. n=0 болғанда Бернулли теңдеуі сызықтық теңдеуге ауысады; n=1 болғанда ол айнымалылары айырылған теңдеуді кескіндейді, өйткені

$$\frac{dy}{dx}+\left[P(x)-Q(x)\right]y=0$$

түріне келеді де, айнымалылары айырылып, интегралдануына болады. Бұдан әрі $n\neq 1$ деп ұйғарамыз. Бернулли теңдеуін сәйкес ауыстырма көмегімен сызықтық теңдеуге келтіруге болады. Ол үшін теңдеудің екі жағын y^n-ге бөлеміз:

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+P(x)\frac{1}{y^{n-1}}=Q(x).$$

$\frac{1}{y^{n-1}}=z$ деп ұйғарамыз. Сонда $\left(1-n\right)\cdot\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$ және Бернулли теңдеуі

$$\frac{dz}{dx}+\left(1-n\right)P(x)z=\left(1-n\right)Q(x)$$

түріне келеді. Бұл z белгісізі бар 1-ретті сызықтық теңдеу. Оны ауыстырма немесе еркін тұрақтыны вариациялау әдісі бойынша интегралдауға және z-ті x-тің функциясы ретінде табуымызға болады. $\frac{1}{y^{n-1}}=z$ ауысымы бойынша бастапқы y айнымалысына оралып, Бернулли теңдеуінің жалпы интегралын шығарып аламыз. Оның үстіне $n>0$ болғанда y=0 функциясы кез келген Бернулли дифференциалдық теңдеуінің шешімі болып табылады.

Мысал. $\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y=-x^3y^2$ Бернулли теңдеуінің жалпы интегралын табу талап етіледі.

Шешімі. Теңдеудің екі жағын y^2-қа бөліп

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{y}=-x^3$$

теңдеуін аламыз. $\frac{1}{y} = z$ деп ұйғарайық; сонда $-\cdot\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ және теңдеу

$$\frac{dz}{dx} + \frac{3}{x}\cdot z = x^3$$

түріне келеді. Бұл сызықтық теңдеуді вариациялау әдісімен интегралдаймыз. Сәйкес $\frac{dz}{dx} + \frac{3}{x}\cdot z = 0$ біртектес теңдеуінің жалпы шешімі $z = C / x^3$.

$C = C(x)$ деп ұйғарып, есептелген $\frac{dz}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{3C(x)}{x^4}$ өрнегін біртектес емес сызықтық теңдеуге енгіземіз; сонда $\frac{dC(x)}{dx}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{3C(x)}{x^4} + \frac{3}{x}\cdot\frac{C(x)}{x^3} = x^3$ немесе $dC(x) = x^6 dx$ шығады.

Одан $C(x) = \frac{x^7}{7} + C_1$. Олай болса біртектес емес теңдеудің жалпы шешімі $z = \frac{x^4}{7} + \frac{C_1}{x^3}$. z-ті $\frac{1}{y}$-пен алмастырып, нәтижесінде $\frac{1}{y} = \frac{x^4}{7} + \frac{C_1}{x^3}$ немесе $y\left(\frac{x^7}{7} + C_1\right) = x^3$ жалпы интегралын табамыз.

§10. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жөнінде қосымша мағлұмат

1-параграфта жалпы шешімді анықтау барысында, берілген бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімнің бар болу шарттары жөнінде сұрақ көтерілген болатын. Олардың қарапайымдауы төмендегідей бірінші ретті дифференциалдық